5. 可逆的DLAクラスターのフラクタル次元(基研研究会「パターン形成,その運動と統計」,研究会報告)

AUTHOR(S):

本田, 勝也; 豊木, 博泰; 松下, 貢

References

1) M. Matsushita, Y. Hayakawa, S. Sato and K. Honda: Phys. Rev. Lett. (6 July 1987).
2) P. Grassberger (unpublished).
3) N. G. Makarov: Proc. London Math. Soc. **51** (1985) 369.
4) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 707.
5) M. Matsushita, K. Honda, H. Toyoki, Y. Hayakawa and H. Kondo: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2618.
6) P. Meakin and T. A. Witten: Phys. Rev. A **28** (1983) 2985.
7) Y. Hayakawa, S. Sato and M. Matsushita: Phys. Rev. A (July 1987).
8) P. Meakin, A. Coniglio, H. E. Stanley and T. A. Witten: Phys. Rev. A **34** (1986) 3325.
9) A. Coniglio and H. E. Stanley: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1068.

5. 可逆的ＤＬＡクラスターのフラクタル次元

名　大・工　　本 田 勝 也
山梨大・教育　豊 木 博 泰
中央工・理工　松 下 　 貢

ランダムなフラクタルパターンを形成するＤＬＡに関する多くの研究が行なわれているが，ここでは可逆的なプロセスで再構築されるＤＬＡ（BJモデル[1]）を議論する。このモデルは平衡系における“臨界状態”を実現するため平衡状態と非平衡状態の橋渡しをする興味深い統計力学の対象となる。

ＢＪモデルは次のようなものである。[1]任意のループのないクラスターを用意し，唯一のボンドでクラスターの他の部分と連結している先端粒子の１個をランダムに選び，ボンドを切断し再びクラスターに付着するまでランダムウォークさせる。もし遠方に飛び去ってしまった場合には，任意の遠方点から放出した別の粒子をランダムウォークを経て付着させクラスターの粒子数を保存する。このようなプロセスを繰り返すと，初期のクラスターがどのような形状であれ一定の回転半径R_gをもつ定常状態に漸近していく。

我々は先に定常状態におけるクラスターのフラクタル次元d_fを解析的に求めた。[2] その結果は

$$d_{\mathrm{f}} = \frac{d^2 + 2(d_{\mathrm{w}} - 1)}{d + 2(d_{\mathrm{w}} - 1)}$$

で与えられる。ここで，d は空間次元，d_{w} はランダムウォーカーの軌跡の次元である。粒子がブラウン運動（$d_{\mathrm{w}} = 2$）する場合は２次元（$d = 2$）で $d_{\mathrm{f}} \simeq 1.5$ となり，ＢＪおよび早川らのシミュレーションの結果とよく一致する。

しかし，この表式は粒子の離脱から付着までのプロセスとその逆プロセスが同確率で存在する平衡状態において，d_{f} が粒子の運動形態（軌跡の次元 d_{w}）に依存するという，通常の“熱平衡系”における常識と矛盾する結論を導き出す。また，可逆的ＤＬＡは平衡系である lattice animal（$d_{\mathrm{f}} \simeq 1.5$）と同じ universal class に属するという Botet らの主張[(3)]とも反する。

我々は(1)式を確めるために，$d_{\mathrm{w}} = 1$ の場合の計算機シミュレーションを行った。直線状およびアコーディオン型に折りたたんだコンパクトなクラスターを初期状態にして，離脱と付着のプロセスを繰り返すと図１のように回転半径 R_g は一定の値に漸近していく。したがって $d_{\mathrm{w}} = 1$ の場合もブラウン粒子（$d_{\mathrm{w}} = 2$）の場合と同様に定常状態が実現する。図１はそれぞれ 50 回の試行について平均して得られたものであり，個々の試行においては R_g のゆらぎは大きくいつまでたっても収まらない。しかし十分繰り返しのステップを経て初期状態の記憶が完全に消失した段階で回転半径を“時間”平均した値は，上記の“アンサンブル”平均の漸近値と一致する。すなわちエルゴード性が成立する。ただし，いまのアンサンブル平均はランダム平均であるから，この体系には粒子数を除いてエネルギーなどの保存量は存在せず，したがって“温度”なども定義できない。

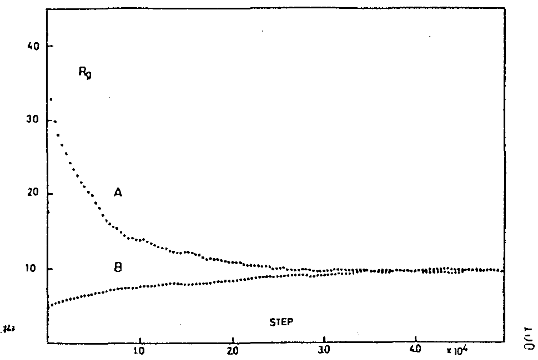

図１．クラスター（$N = 144$）の回転半径のステップによる変化。直線状（Ａ）およびアコーディオン型（Ｂ）を初期状態として50回の試行について平均したもの。

個々の試行において回転半径の変動が定常状態にあっても収まらないことは次のように理解される。回転半径が小さい場合は，重心近くの先端粒子が離脱しクラスターの枝の先の部分に付着するプロセスが多くなる。一方回転半径が大きいクラスターでは，多くの先端粒子は枝の先にあり無限遠方に飛び去る可能性が増し，遠方から放出された別の粒子がクラスター内部に飛来し回転半径を小さくする。この２つの傾向が交互に現れることによって回転半径は大きくゆらぐことになる。また，定常状態のクラスターはフラクタルパターンであるから，密度相関

関数はベキ乗則を示す。まさしく臨界点での振る舞いである。この大きなゆらぎのため，クラスターのフラクタル次元は粒子の運動形態に依存することになる。

粒子数を変えて定常状態での回転半径R_gをプロットしたものが図2であり，$N \simeq 1.5 R_g^{2.0}$の関係を示す。ベキ2.0は(1)式に$d=2$，$d_w=1$を代入して得られる値と一致する。また係数1.5から粒子の密度は0.24と評価され，$d_f=d$ながらこのクラスターはコンパクトでなく一様に広がった形状をしていることが判る。念のため半径rの円内に含まれる粒子数$n(r)$をrの関数として描いた図3を掲げる。図2と同じ勾配2.0を与える。

以上のように，可逆的なDLAモデルは臨界点におけるゆらぎの大きいクラスターの描像を与え，そのフラクタル次元は(1)式で期待されるようにクラスターを構成する粒子の運動形態に強く依存することが明らかになった。

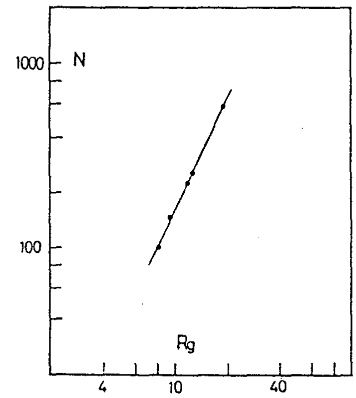

図2. 粒子数とクラスターの回転半径の関係・実線は$N=1.5 R_g^{2.0}$を表わす。

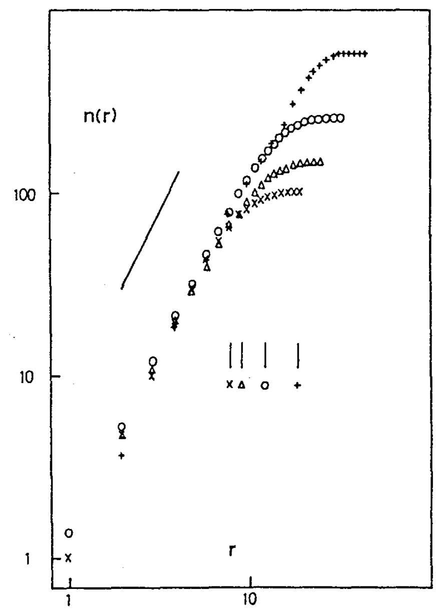

図3. 半径rの円内に含まれる粒子数$n(r)$(X，$N=100$；△，$N=144$；○，$N=256$；+，$N=576$)．実線の勾配は2.0．垂線はそれぞれの回転半径を示す。

参考文献

1) R. Botet and R. Jullien: Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1943.

2) 本田，豊木，松下：物性研究 46 (1986) 819.

3) R. Botet, R. Jullien and M. Kolb: *Fractals in Physics* (ed. L. Pietronero and E. Tosatti).